CAPITOLO 3

Disuguaglianze di tipo log–Sobolev

Nell'ambito di questo capitolo vogliamo discutere alcune proprietà legate al comportamento asintotico del semigruppo $(T(t))$ e altre disuguaglianze funzionali che evidenziano, tra l'altro, come gli spazi $L^p(\mu)$, con μ invariante, siano i piú naturali per lo studio di $(T(t))$. Nell'ultima sezione applichiamo alcuni dei risultati provati per provare l'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.

3.1. Preliminari

Ricordiamo che il semigruppo di Markov $(T(t))$ finora considerato ammette la rappresentazione

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t,x,y)f(y)dy, \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N),$$

con $p(t,x,y) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$. Assumiamo che esista una misura invariante μ per $(T(t))$. Allora, dalla Proposizione 2.2 sappiamo che μ è regolare e quindi, dal Corollario 2.4, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$. Approssimando $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ con funzioni in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, si vede che μ è una misura invariante per $(T(t))$ se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)d\mu(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.1}$$

Ne segue che $(T(t))$ si estende ad un C_0–semigruppo contrattivo in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$ e la condizione (3.1) è equivalente alla condizione

$$\int_{\mathbb{R}^N} A_p f(x)d\mu(x) = 0 \quad \forall f \in D(A_p),$$

dove $(A_p, D(A_p))$ è il generatore infinitesimale di $T(t)$ in $L^p(\mu)$. Definiamo l'insieme

$$RP_\infty(\mathbb{R}) := \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ regolare con crescita polinomiale all'infinito } \}.$$

Supporremo nel seguito che esista, senza specificarla, un'algebra di funzioni $\mathcal{A}$ con le seguenti proprietà:

- $\overline{\mathcal{A}} = L^p(\mu)$, per ogni $p \in [1, +\infty)$;
- $\mathcal{A} \subset D(A_2)$;
- $T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, per ogni $t > 0$;
- $\phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, per ogni $\phi \in RP_\infty(\mathbb{R})$;
- A_2 è un operatore di diffusione, cioè

$$A_2(\phi(f)) = \phi'(f)A_2 f + \phi''(f)\Gamma(f,f) \tag{3.2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$ e $\phi \in RP_\infty(\mathbb{R})$ e con Γ definita di seguito, in (3.4).

Queste ipotesi implicano in particolare che $\mathcal{A}$ è un core per $(A_2, D(A_2))$ e come esempio di riferimento si può pensare che $\mathcal{A}$ sia lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni a decrescita rapida all'infinito.

Per ogni φ funzione convessa, dalla disuguaglianza di Jensen, dato che $p(t,x,\cdot)$ è una misura di probabilità, segue che

$$\varphi(T(t)f) \leq T(t)\varphi(f);$$

in particolare, se prendiamo $\varphi(x) = x^2$, troviamo che

$$(T(t)f)^2 \leq T(t)f^2$$

e quindi

$$2fA_2 f = \lim_{t\to 0} \frac{(T(t)f)^2 - f^2}{t} \leq A_2 f^2, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

Definizione 3.1. *Su $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, definiamo la forma bilineare*

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(A_2(fg) - fA_2 g - gA_2 f\right), \quad f, g \in \mathcal{A}; \tag{3.4}$$

la forma Γ viene detta square field.

Grazie a (3.3), la forma Γ è semi–definita positiva. Definiamo poi la forma di Dirichlet associata ponendo

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,g)d\mu.$$

Osserviamo che, siccome μ è misura invariante,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,f)d\mu = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (A_2 f^2 - 2fA_2 f)d\mu \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} fA_2 f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

In **[25]**, viene dimostrato il seguente risultato astratto;

se Γ è una forma bilineare definita su un'algebra commutativa $\mathcal{A}$ tramite (3.4) con un certo operatore A, e $\Gamma(f,f) \geq 0$, allora per ogni polinomio convesso Φ e per ogni $f \in \mathcal{A}$ risulta

$$A\Phi(f) \geq \Phi'(f)Af.$$

Questo garantisce in particolare che A genera un semigruppo di Markov.

Osservazione 3.2. Supponiamo ora che $(T(t))$ sia simmetrico, cioè che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)\, g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} fT(t)g d\mu, \quad \forall f, g \in L^2(\mu);$$

questo è equivalente a richiedere che

$$\int_{\mathbb{R}^N} gA_2 f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} fA_2 g\, d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Quindi, nel caso simmetrico, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} gA_2 f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,g) d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Nel caso non simmetrico, si riesce solo a dire che

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \frac{A_2 + A_2^*}{2} f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(f,g) d\mu, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

3.2. Spectral Gap

Diamo la seguente definizione.

Definizione 3.3. *Diremo che l'operatore A_2 soddisfa la condizione di spectral gap con costante $C > 0$, in breve $(SG)_C$, se per la varianza*

$$\sigma^2(f) := \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right)^2,$$

vale la seguente stima

$$\sigma^2(f) \leq C\mathcal{E}(f,f), \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Abbiamo la seguente caratterizzazione dello spectral gap, che ne motiva la terminologia.

Proposizione 3.4. *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ sia simmetrico in $L^2(\mu)$. Allora A_2 soddisfa $(SG)_C$ se e solo se*

$$\sigma(-A_2) \subset \{0\} \cup [1/C, +\infty).$$

Dim. Ricordiamo che

$$\sigma(-A_2) = P\sigma(-A_2^*) \cup A\sigma(-A_2),$$

dove $P\sigma(-A_2^*)$ denota lo spettro puntuale dell'aggiunto di $-A_2$ (cioè l'insieme degli autovalori), mentre $A\sigma(-A_2)$ denota lo spettro approssimato. Ricordiamo che $\lambda \in A\sigma(-A_2)$ se e solo se esiste una successione $f_n \in D(A_2)$ con $\|f_n\|_2 = 1$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \|\lambda f_n + A_2 f_n\|_2 = 0.$$

La condizione di simmetria per A_2 garantisce che il suo spettro coincide con lo spettro approssimato, $\sigma(-A_2) = A\sigma(-A_2)$. Sia quindi $0 \neq \lambda \in \sigma(-A_2)$ e sia f_n una successione con le proprietà prima descritte. Allora

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(\lambda f_n + A_2 f_n)d\mu = 1 + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} f_n A_2 f_n d\mu = 1 - \frac{1}{\lambda}\mathcal{E}(f_n, f_n) \to 0,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}(f_n, f_n) = \lambda.$$

Inoltre, dato che

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f_n + A_2 f_n)d\mu \to 0,$$

si ha anche che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu = 0.$$

Infine, siccome $\sigma^2(f_n) \to 1$ e

$$\sigma^2(f_n) = 1 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu\right)^2 \le C\mathcal{E}(f_n, f_n),$$

mandando $n \to +\infty$, si ottiene che $\lambda \ge 1/C$. Viceversa, sia $f \in \mathcal{A}$ e supponiamo per il momento che f abbia media nulla, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0.$$

Dal teorema spettrale (si veda ad esempio [**35**]), dato che A_2 è simmetrico, si ha che

$$-A_2 f = \int_{1/C}^{\infty} t\, dE_t(f).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(-A_2 f)d\mu = -\langle A_2 f, f\rangle_{L^2(\mu)} = \int_{1/C}^{\infty} t\, d\langle E_t(f), f\rangle_{L^2(\mu)} \\ &\ge \frac{1}{C}\int_{1/C}^{\infty} d\langle E_t(f), f\rangle_{L^2(\mu)} = \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu \le C\mathcal{E}(f, f), \qquad \forall f \in \mathcal{A} \text{ t.c. } \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0.$$

Se f non ha media nulla, basta ripetere il ragionamento per $f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$. $\square$

La proposizione seguente mette in luce una proprietà equivalente alla condizione di spectral gap.

Proposizione 3.5. *Sono equivalenti*

(i) *vale* $(SG)_C$*;*
(ii) *per ogni* $t > 0, f \in \mathcal{A}$*, risulta* $\sigma^2(T(t)f) \leq e^{-2t/C}\sigma^2(f)$*.*

Dim. $(ii) \Rightarrow (i)$. Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 3.4, è sufficiente mostrare (i) per ogni $f \in \mathcal{A}$ con $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$. A tale scopo, ricorrendo allo sviluppo di Taylor, troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + 2t \int_{\mathbb{R}^N} f A_2 f d\mu + o(t), \quad \text{per } t \to 0,$$

da cui

$$\sigma^2(T(t)f) = \int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu = \sigma^2(f) - 2t\mathcal{E}(f,f) + o(t) \leq e^{-2t/C}\sigma^2(f),$$

e quindi

$$(1 - e^{-2t/C})\sigma^2(f) \leq 2t\mathcal{E}(f,f) + o(t).$$

Dividendo per $2t$ e mandando $t \to 0$ abbiamo che

$$\frac{1}{C}\sigma^2(f) \leq \mathcal{E}(f,f)$$

e quindi la tesi.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Mostriamo che vale (ii) per le funzioni $f \in \mathcal{A}$ con $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$. Posto

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (T(t)f)^2 d\mu,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= 2\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f A_2 T(t)f d\mu = -2\mathcal{E}(T(t)f, T(t)f) \\ &\leq -\frac{2}{C}\sigma^2(T(t)f) = -\frac{2}{C}\Phi(t), \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi(t) \leq e^{-2t/C}\Phi(0) = e^{-2t/C}\sigma^2(f),$$

che era quanto volevamo mostrare. □

Osservazione 3.6. Se al posto di Γ consideriamo un'altra forma Γ_1 con la proprietà

$$\Gamma \leq a\Gamma_1,$$

allora (Γ_1, μ) soddisfa $(SG)_{aC}$, non appena (Γ, μ) soddisfa $(SG)_C$.

Osservazione 3.7. Siano μ e μ_1 due misure per le quali

$$\frac{1}{a}\mu \leq \mu_1 \leq \mu, \quad a > 1.$$

Se (Γ, μ) soddisfa $(SG)_C$, allora (Γ, μ_1) soddisfa $(SG)_{aC}$.

Esempio 3.8. Prendiamo $\mathcal{A} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ e per $f, g \in \mathcal{A}$ definiamo

$$\Gamma(f, g) = f' \cdot g'.$$

Sia poi

$$d\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} dx.$$

Allora

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{-|x|} f') = \frac{1}{2}(-\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} f' + e^{-|x|} f'') = \frac{e^{-|x|}}{2}(f'' - \operatorname{sgn}(x) f').$$

Grazie all'Osservazione 3.2, si vede che l'operatore associato a Γ è dato da

$$Af = f'' - \operatorname{sgn}(x) f'.$$

Sia $u(x) = |x|$; allora

$$Au = -1 \quad \text{e} \quad \Gamma(u, u) = 1.$$

Inoltre

$$\Gamma(f, u) = \operatorname{sgn}(x) f', \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Ricordando com'è definita μ, integrando per parti e applicando la disuguaglianza di Hölder ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}} f \Gamma(f, u) d\mu \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \Gamma(f, u)^2 d\mu \right)^{1/2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$ con $f(0) = 0$, da cui

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\mu \leq 4 \int_{\mathbb{R}} \Gamma(f, u)^2 d\mu = 4 \int_{\mathbb{R}} (f')^2 d\mu = 4\mathcal{E}(f, f).$$

Se $f(0) \neq 0$, si ragiona sulla funzione $f - f(0)$. Pertanto, abbiamo verificato che A soddisfa $(SG)_C$ con $C = 4$. Alla fine della sezione vedremo che la costante 4 è ottimale.

Nel seguito utilizzeremo il seguente teorema, che presentiamo qui senza dimostrazione ([**9**]).

Teorema 3.9 (Muckenhaupt). *Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$; se μ soddisfa la condizione $(SG)_C$ rispetto alla forma $\Gamma(f, f) = (f')^2$, allora μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m. Sia ϱ la densità. Inoltre, preso $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\mu([\alpha, +\infty)) = \mu(-\infty, \alpha]) = \frac{1}{2},$$

e denotati con

$$B_+ = \sup_{x>\alpha} \mu([x,+\infty)) \int_\alpha^x \frac{1}{\varrho(t)} dt, \quad B_- = \sup_{x<\alpha} \mu((-\infty,x]) \int_x^\alpha \frac{1}{\varrho(t)} dt,$$

risulta che μ soddisfa la $(SG)_C$ se e solo se

$$B = \max\{B_+, B_-\} < +\infty$$

e la miglior costante C è compresa tra B e $4B$.

Proposizione 3.10. *Supponiamo che l'operatore A_2 soddisfi $(SG)_C$; se f verifica $\Gamma(f,f) \leq 1$ e*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| < \infty,$$

allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu < \infty$$

per ogni $\lambda < \sqrt{4/C}$.

Dim. La dimostrazione che qui presentiamo è presa da [**22**]. Mostriamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu \leq e^{\lambda \int f d\mu} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{C\lambda^2}{4^{k+1}}\right)^{-2^k}. \tag{3.1}$$

Se al posto di f si prende la funzione

$$f_n = -n \vee (f \wedge n),$$

si ha ancora che $\Gamma(f_n, f_n) \leq 1$; dal Lemma di Fatou, se la disuguaglianza (3.1) è vera per f_n, passando al limite sarà vera anche per f. Quindi non è restrittivo supporre $f \in L^\infty$. Se prendiamo la funzione $g = e^{f\lambda/2}$, tenendo presente che A_2 è un operatore di diffusione, si ottiene che

$$\Gamma(g,g) = \frac{1}{2}\left(A_2 g^2\right) - gA_2 g = \frac{\lambda^2}{4} e^{\lambda f} \Gamma(f,f).$$

Se ne deduce che

$$\mathcal{E}(g,g) \leq \frac{\lambda^2}{4} \Phi(\lambda)$$

con

$$\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu.$$

La proprietà $(SG)_C$ implica quindi che

$$\sigma^2(g) = \Phi(\lambda) - \Phi^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq C\mathcal{E}(g,g) \leq \frac{C\lambda^2}{4}\Phi(\lambda),$$

e quindi

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(1 - \frac{C\lambda^2}{4}\right)^{-1}.$$

Iterando il procedimento si ottiene l'asserto; difatti, dopo $n+1$ passi abbiamo

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi^{2^n}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{C\lambda^2}{4^{k+1}}\right)^{-2^k}$$

e, siccome, per n abbastanza grande

$$\Phi^{2^n}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f/2^n} d\mu\right)^{2^n} \simeq e^{2^n(\int e^{\lambda f/2^n} d\mu - 1)} = e^{\lambda\int \frac{e^{\lambda f/2^n}-1}{\lambda/2^n} d\mu}$$

mandando $n \to \infty$, abbiamo (3.1). $\square$

Ritornando all'Esempio 3.8, proviamo che la costante 4 è ottimale; se $C < 4$, allora nella Proposizione 3.10 potremmo scegliere $\lambda = 1$ e $f(x) = |x|$, ottenendo un assurdo.

3.3. Disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e il teorema di L. Gross

Data una funzione f positiva, definiamo la seguente quantità

$$\mathrm{Ent}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \log f d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)\log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right),$$

detta **entropia** di f. Applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione strettamente convessa $\phi(x) = x\log x$, $x > 0$, si vede che $\mathrm{Ent}(f) \geq 0$ e $\mathrm{Ent}(f) = 0$ se e solo se f è costante.

Definizione 3.11. *Diremo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con costanti M, C se*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq M\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + C\,\mathcal{E}(f,f), \tag{3.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+ = \{f \in \mathcal{A} : \exists\alpha > 0 \text{ tale che } f \geq \alpha\}$.

La definizione precedente si deve a Gross, il quale introdusse le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche per lo studio dell'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck (si veda [**19**]). Per i nostri scopi è utile anche introdurre la seguente definizione che è una formulazione piú forte della precedente.

Definizione 3.12. *Diremo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C se (3.1) è verificata con $M = 0$.*

Osservazione 3.13. Facciamo notare che, per quanto detto sopra, se il semigruppo soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight, allora vale l'implicazione

$$\Gamma(f,f) = 0 \Rightarrow f \text{ costante.}$$

Ciò discende semplicemente dal fatto che se $\Gamma(f,f) = 0$, allora $\mathcal{E}(f,f) = 0$ e (3.1) con $M = 0$ implica che $\mathrm{Ent}(f^2) = 0$, da cui f costante.

Proposizione 3.14. *Il semigruppo $(T(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C se e solo se per ogni $f \in L^1(\mu)$, $f > 0$, risulta*

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) \le e^{-\frac{4}{C}t}\,\mathrm{Ent}(f), \quad t \ge 0.$$

Dim. Proviamo dapprima la sufficienza. Usando lo sviluppo di Taylor troviamo che

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) = \mathrm{Ent}(f) + t\int_{\mathbb{R}^N} (A_2 f)\log f\,d\mu + o(t), \tag{3.2}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Siccome A_2 è un operatore di diffusione, inserendo $\phi(x) = \sqrt{x}$ in (3.2), deduciamo

$$2\sqrt{f}A_2(\sqrt{f}) = A_2 f - \frac{1}{2f}\Gamma(f,f),$$

da cui integrando rispetto a μ

$$2\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) = -2\int_{\mathbb{R}^N}\sqrt{f}A_2(\sqrt{f})d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2f}\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.3}$$

Analogamente, se consideriamo in (3.2) la funzione $\phi(x) = x\log x - x$ otteniamo

$$A_2(f\log f) - A_2 f = (\log f)A_2 f + \frac{1}{f}\Gamma(f,f)$$

e quindi, integrando e tenendo conto di (3.3)

$$-\int_{\mathbb{R}^N}(\log f)A_2 f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\mu = 4\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}). \tag{3.4}$$

Inserendo quanto ottenuto in (3.2) e usando l'ipotesi abbiamo

$$\mathrm{Ent}(T(t)f) = \mathrm{Ent}(f) - 4\,t\,\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) + o(t) \le e^{-\frac{4}{C}t}\,\mathrm{Ent}(f)$$

da cui

$$\frac{1-e^{-\frac{4}{C}t}}{t}\,\mathrm{Ent}(f) \le 4\,\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) + \frac{o(t)}{t}.$$

Mandando $t \to 0$, risulta provata la tesi con $\sqrt{f}$ al posto di f.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{Ent}(f^2) \le C\,\mathcal{E}(f,f)$, per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Sia $f \in \mathcal{A}_+$ fissata e sia

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^N}\phi(T(t)f)d\mu,$$

dove $\phi(x) = x \log x$. Siccome $\text{Ent}(\lambda f) = \lambda \text{Ent}(f)$ per ogni $\lambda > 0$, non è restrittivo supporre che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 1$. Applicando (3.4) con $T(t)f$ al posto di f risulta

$$H'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \log(T(t)f)(A_2 T(t)f) d\mu = -4\,\mathcal{E}(\sqrt{T(t)f}, \sqrt{T(t)f})$$

da cui, in virtú dell'ipotesi, segue che

$$H'(t) \leq -\frac{4}{C}\,\text{Ent}(T(t)f) = -\frac{4}{C}\,H(t),$$

dove nell'ultimo passo è stato usato il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f d\mu = 1.$$

Integrando la disequazione differenziale ottenuta deduciamo la tesi, quando $f \in \mathcal{A}_+$. Il caso generale segue per densità e usando la positività del semigruppo $(T(t))$. □

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente sul semigruppo affinché questo soddisfi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight e costituisce il passaggio cruciale per la dimostrazione del teorema di Nelson [**30**] (Teorema 3.24).

PROPOSIZIONE 3.15. *Supponiamo che il semigruppo* $(T(t))$ *sia ergodico, cioè*

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)f = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

in $L^2(\mu)$. *Se esiste* $\lambda > 0$ *tale che per ogni* $f \in \mathcal{A}_+$ *si abbia*

$$-\int_{\mathbb{R}^N} A_2 T(t) f \log T(t) f d\mu \leq e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^N} -A_2 f \log f d\mu, \tag{3.5}$$

allora il semigruppo $(T(t))$ *soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante* $4/\lambda$.

DIM. Dato che c'è convergenza in norma $L^2(\mu)$, ci sarà convergenza quasi ovunque, e quindi grazie al teorema della convergenza dominata si avrà che

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t) f \log T(t) f d\mu \to \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right) \log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f\log f d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)\log\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right) \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f\log T(t)f d\mu\, dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} A_2T(t)f\log T(t)f d\mu\, dt \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^N} A_2 f\log f d\mu \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \\
&= -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} A_2 f\log f d\mu \\
&= \frac{4}{\lambda}\mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}),
\end{aligned}$$

grazie a (3.4). Prendendo quindi f^2 al posto di f, segue la tesi. □

Osservazione 3.16. Applicando l'idendità (3.4) a $T(t)f$ si vede che (3.5) è equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{T(t)f}\Gamma(T(t)f,T(t)f)d\mu \leq e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.6}$$

Il prossimo obiettivo è quello di stabilire una relazione tra le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e la proprietà di spectral gap. A tale scopo ci occorre un risultato preliminare rappresentato dal seguente lemma. Esso risale a Rothaus ([**33**]), ma la dimostrazione che presentiamo è dovuta a Bakry.

Lemma 3.17 (Rothaus). *Sia $f \in L^2(\mu)$ con $\mathrm{Ent}(f)$ finita. Posto $\tilde{f} = f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq \mathrm{Ent}(\tilde{f}^2) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu. \tag{3.7}$$

Dim. Mostriamo prima che per ogni funzione $g \in L^\infty(\mu)$ con le seguenti proprietà

$$\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} g^2 d\mu = 1,$$

vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2\log(1+tg)^2 d\mu \leq\ & (1+t^2)\log(1+t^2) \\
& + t^2\int_{\mathbb{R}^N} g^2\log g^2 d\mu + 2t^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

per ogni $t \geq 0$. A tal proposito, introduciamo la funzione

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{1+t^2} d\mu - t^2 \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu$$

e notiamo subito che $\varphi_\varepsilon(0) = \log(1+\varepsilon)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\varphi'_\varepsilon(t) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(1+tg)\log\big((1+tg)^2+\varepsilon\big)d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(1+tg)^3}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu \\ &\quad -t\left(1+\log(1+t^2) + \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\varphi''_\varepsilon(t) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{g^2(1+t^2)} d\mu + 5\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^2}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu \\ &\quad -2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^4}{\big((1+tg)^2+\varepsilon\big)^2} d\mu - 1 - \frac{2t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione concava $\log x$ e alla misura di probabilità $g^2 d\mu$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log u \, d\mu \leq \log \int_{\mathbb{R}^N} u g^2 d\mu,$$

per ogni funzione $u > 0$. Scegliendo $u = \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{g^2(1+t^2)}$, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log u \, d\mu \leq \log \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1+tg)^2+\varepsilon}{(1+t^2)} d\mu = \log\left(1+\frac{\varepsilon}{1+t^2}\right). \tag{3.9}$$

Posto $\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^2}{(1+tg)^2+\varepsilon} d\mu$, applichiamo ancora la disuguaglianza di Jensen alla funzione convessa x^2 e alla misura $g^2 d\mu$ per ottenere

$$\alpha^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g^2(1+tg)^4}{\big((1+tg)^2+\varepsilon\big)^2} d\mu. \tag{3.10}$$

Tenendo conto delle stime (3.9), (3.10) e del fatto che $5\alpha - 2\alpha^2 - 1 \leq 2$ per $\alpha \in [0,1]$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}\,\varphi''_\varepsilon(t) \leq \log\left(1+\frac{\varepsilon}{1+t^2}\right) + 5\alpha - 2\alpha^2 - 1 \leq \log(1+\varepsilon) + 2.$$

Integrando tra 0 e t l'ultima disuguaglianza e osservando che $\varphi'_\varepsilon(0) = 0$ ricaviamo

$$\varphi'_\varepsilon(t) \leq 2\,t\,\log(1+\varepsilon) + 4\,t.$$

Integrando di nuovo otteniamo

$$\varphi_\varepsilon(t) \leq \log(1+\varepsilon) + t^2\big(\log(1+\varepsilon)+2\big).$$

Ricordando l'espressione di $\varphi_\varepsilon(t)$ e mandando $\varepsilon \to 0$ segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log(1+tg)^2 d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} (1+tg)^2 \log(1+t^2) d\mu$$

$$\leq t^2 \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \log g^2 d\mu + 2t^2$$

da cui si deduce (3.8), tenendo conto ancora una volta delle proprietà di g.

Ora, siccome $L^\infty(\mu)$ è denso in $L^2(\mu)$, è sufficiente provare (3.7) per $f \in L^\infty(\mu)$. Se f ha media nulla non c'è niente da dimostrare. Quindi supponiamo che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \neq 0$. Inoltre, dato che $\mathrm{Ent}(\cdot)$ è positivamente omogenea di grado uno, non è restrittivo assumere che $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 1$. Allora per la disuguaglianza di Jensen $1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu$ e, siccome $\mathrm{Ent}(f) \neq 0$, deve essere $1 < \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu$. Per concludere, prendiamo

$$t = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - 1} \text{ e } \quad g = \frac{1}{t}(f-1),$$

e applicando (3.8) otteniamo (3.7), che era quello che volevamo provare. □

Siamo pronti ora per dimostrare la relazione che intercorre tra le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e lo spectral gap.

Teorema 3.18. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ verifichi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C. Allora la disuguaglianza di spectral gap è soddisfatta con costante $C/2$;*
(b) *Supponiamo che la disuguaglianza di spectral gap sia soddisfatta con costante $\tilde{C}$ e che valga la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con costanti M e C. Allora vale la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $C + \tilde{C}(M+2)$.*

Dim. (a) Per ipotesi, per ogni $f \in \mathcal{A}_+$ risulta $\mathrm{Ent}(f^2) \leq C\mathcal{E}(f,f)$. Sostituendo f con $1+\varepsilon f$ si ottiene

$$\mathrm{Ent}((1+\varepsilon f)^2) \leq C\mathcal{E}(1+\varepsilon f, 1+\varepsilon f) = \varepsilon^2\, C\mathcal{E}(f,f).$$

D'altra parte, ricorrendo allo sviluppo di Taylor, si vede che

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}((1+\varepsilon f)^2) &= 2\varepsilon^2\Big(\int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu - \big(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\big)^2\Big) + o(\varepsilon^2) \\ &= 2\varepsilon^2 \sigma^2(f) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dividendo per ε^2 e mandando $\varepsilon \to 0$, abbiamo la tesi.

(b) Posto $\tilde{f} = f - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, risulta $\mathcal{E}(f,f) = \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f})$. Grazie alla disuguaglianza di spectral gap abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \leq \tilde{C}\mathcal{E}(f,f). \tag{3.11}$$

Applicando il Lemma 3.17, la disuguaglianza di Sobolev logaritmica e (3.11) otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(f^2) &\leq \mathrm{Ent}(\tilde{f}^2) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \\
&\leq M\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu + C\mathcal{E}(f,f) + 2\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu \\
&= (M+2)\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}^2 d\mu + C\mathcal{E}(f,f) \\
&\leq \big((M+2)\tilde{C} + C\big)\mathcal{E}(f,f).
\end{aligned}$$

□

A questo punto, ci proponiamo di mostrare che la disuguaglianza di Sobolev logaritmica equivale all'ipercontrattività del semigruppo. Questo è il contenuto del teorema di Gross. Per dimostrare tale risultato ci occorrono delle osservazioni preliminari.

Sia φ una funzione regolare e $\psi \in RP_\infty(\mathbb{R})$ una primitiva di φ, cioè $\psi' = \varphi$. Se $f \in \mathcal{A}$, allora, ricordando che A_2 è un operatore di diffusione, $A_2(\psi(f)) = \varphi(f)A_2 f + \varphi'(f)\Gamma(f,f)$, e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(f)A_2 f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi'(f)\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.12}$$

Inoltre, se anche ϕ è una funzione regolare con crescita polinomiale, allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\phi(f),\phi(f)) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\phi(f),\phi(f))d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)A_2(\phi(f))d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi'(f)A_2 f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi''(f)\Gamma(f,f)d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\phi^2\right)'(f)A_2 f - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(f)\phi''(f)\Gamma(f,f)d\mu.
\end{aligned}$$

Applicando (3.12) con $\psi = \phi^2/2$ segue che

$$\mathcal{E}(\phi(f),\phi(f)) = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\phi'(f)\big)^2\Gamma(f,f)d\mu. \tag{3.13}$$

Notiamo ora che la disuguaglianza di Sobolev logaritmica è stata data con esponente quadratico; grazie a (3.12) e (3.13), essa può essere estesa ad esponente arbitrario $p \in (1,+\infty)$ nel seguente modo:

Lemma 3.19. *Sono equivalenti:*

(i) $(T(t))$ *soddisfa la disugualianza di Sobolev logaritmica con costanti* M *e* C*;*

(ii) *per ogni* $p \in (1, \infty)$ *e ogni* $f \in \mathcal{A}_+$ *risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^p) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu.$$

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$. Assumiamo che

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^2 d\mu + C\mathcal{E}(f, f)$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$. Presa $f \in \mathcal{A}_+$ mettendo $f^{p/2}$ al posto di f e applicando, rispettivamente, (3.13) con $\phi(x) = x^{\frac{p}{2}}$ e (3.12) con $\varphi(x) = (p-1)^{-1} x^{p-1}$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(f^p) &\leq M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu + C\mathcal{E}(f^{p/2}, f^{p/2}) \\ &= M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu + \frac{Cp^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-2} \Gamma(f, f) d\mu \\ &= M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La stima ottenuta è la disuguaglianza di Sobolev logaritmica per p qualunque.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Se (3.14) è soddisfatta per qualche $p \in (1, \infty)$ e per ogni $f \in \mathcal{A}_+$, procedendo a ritroso si ritrova la disuguaglianza di Sobolev logaritmica con $p = 2$. □

Pertanto, abbiamo dimostrato che la validità di tali disuguaglianze è indipendente da $p \in (1, +\infty)$.

Teorema 3.20 (Gross). *Siano* $C > 0$, $M \geq 0$ *e* $p \in (1, +\infty)$ *fissati. Poniamo*

$$q(t) = (p-1)e^{\frac{4}{C}t} + 1, \qquad m(t) = M\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(t)}\right), \quad t \geq 0.$$

Sono equivalenti

(i) *la disuguaglianza di Sobolev logaritmica è verificata con costanti* M *e* C*;*
(ii) *per ogni* $t > 0$, $f \in L^p(\mu)$ *risulta*

$$\|T(t)f\|_{L^{q(t)}(\mu)} \leq e^{m(t)} \|f\|_{L^p(\mu)}. \tag{3.15}$$

*La proprietà (ii) esprime l'***ipercontrattività** *del semigruppo* $(T(t))$ *da* $L^p(\mu)$ *a* $L^{q(t)}(\mu)$.

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$. Siccome l'algebra $\mathcal{A}$ è densa in $L^p(\mu)$, possiamo considerare $f \in \mathcal{A}$. In piú, non è restrittivo supporre $f \in \mathcal{A}_+$, poiché, nel caso generale, basta considerare $f_\varepsilon = (f^2+\varepsilon)^{1/2} \in \mathcal{A}_+$ e applicare il teorema della convergenza dominata mandando $\varepsilon \to 0$. Quindi, se vale (3.15) per le f_ε, dato che $(T(t))$ è fortemente continuo in ogni $L^p(\mu)$, segue la (3.15) per $|f|$. In questo modo, la tesi risulta provata per $T(t)|f|$: dalla positività di $T(t)$ segue quindi che, scritto $f = f_+ - f_-$

$$\begin{aligned} |T(t)f| &= |T(t)f_+ - T(t)f_-| \le |T(t)f_+| + |T(t)f_-| \\ &= T(t)f_+ + T(t)f_- = T(t)|f|, \end{aligned}$$

da cui la (3.15) per f.

Sia dunque $f \in \mathcal{A}_+$. Poniamo

$$u(t) = T(t)f, \qquad \mathcal{H}(t) = e^{-m(t)}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu\bigg)^{1/q(t)}.$$

Osserviamo che $\mathcal{H}(0) = \|f\|_p$, per cui la stima di ipercontrattività (3.15) è equivalente alla disuguaglianza

$$\mathcal{H}(t) \le \mathcal{H}(0), \qquad t > 0.$$

Facciamo vedere che $\mathcal{H}' \le 0$. Ricordando che $u'(t) = A_2u(t)$, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t) = \mathcal{H}(t)\bigg(&-m'(t) - \frac{q'(t)}{q^2(t)}\log\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+\frac{q'(t)}{q(t)}\frac{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}\log u(t)d\mu}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1}A_2u(t)d\mu}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu}\bigg) \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu}\,\frac{q'(t)}{q^2(t)}\bigg\{ &-m'(t)\frac{q^2(t)}{q'(t)}\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &-\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu\bigg)\log\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)}\log u(t)^{q(t)}d\mu \\ &+\frac{q^2(t)}{q'(t)}\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1}A_2u(t)d\mu\bigg\} \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{H}'(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu} \frac{q'(t)}{q^2(t)} \left\{ \mathrm{Ent}\big(u(t)^{q(t)}\big) - \frac{q^2(t)}{q'(t)} \left(m'(t) \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1} A_2 u(t) d\mu \right) \right\}. \tag{3.16}$$

A questo punto, applicando (3.14) con $u(t)$ e $q(t)$ al posto di f e p rispettivamente si ottiene

$$\mathrm{Ent}\big(u(t)^{q(t)}\big) \le M \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)} d\mu - \frac{Cq^2(t)}{4(q(t)-1)} \int_{\mathbb{R}^N} u(t)^{q(t)-1} A_2 u(t) d\mu.$$

La tesi segue ora osservando che la scelta di m e q è tale che

$$\frac{q^2(t)}{q'(t)} m'(t) = M, \qquad \frac{q^2(t)}{q'(t)} = \frac{Cq^2(t)}{4(q(t)-1)},$$

per cui, l'ultimo membro di (3.16) risulta negativo.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $f \in \mathcal{A}_+$. Nella prima parte della dimostrazione abbiamo osservato che la condizione (ii) equivale a $\mathcal{H}(t) \le \mathcal{H}(0)$. Ciò implica necessariamente $\mathcal{H}'(0) \le 0$ da cui segue

$$\mathrm{Ent}(f^p) \le M \int_{\mathbb{R}^N} f^p d\mu - \frac{Cp^2}{4(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1} A_2 f d\mu,$$

che è proprio la (3.14), cioè la (i). □

Proposizione 3.21. *Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ soddisfi la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante C; allora per ogni $f \in L^1(\mu)$ con $\Gamma(f,f) \le 1$ q.o. si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2} d\mu < +\infty, \quad \forall \alpha < \frac{1}{C}.$$

Precisamente, vale la seguente stima

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2} d\mu \le \frac{1}{\sqrt{1 - C\alpha}} \exp\left(\frac{\alpha}{1 - C\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right)^2 \right). \tag{3.17}$$

Dim. Dimostriamo (3.17) per $f \in \mathcal{A}_+ \cap L^\infty$ (possiamo eventualmente anche supporre che $\mathcal{A}_+ \subset L^\infty$). Applicando la disuguaglianza di Sobolev logaritmica alla funzione $e^{\frac{\lambda}{2} f}$ e definendo la funzione $H(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} d\mu$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(e^{\lambda f}) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f} \lambda f d\mu - H(\lambda) \log H(\lambda) \\ &= \lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \log H(\lambda) \\ &\le C\mathcal{E}(e^{\frac{\lambda}{2} f}, e^{\frac{\lambda}{2} f}). \end{aligned}$$

Ricordando la formula (3.13) otteniamo che

$$\mathrm{Ent}(e^{\lambda f}) = \lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \le C\frac{\lambda^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda f}\Gamma(f,f)d\mu \le C\frac{\lambda^2}{4}H(\lambda),$$

da cui

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \le \frac{C\lambda^2}{4}H(\lambda).$$

Vale quindi la disuguaglianza

$$\left(\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda)\right)' = \frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda\frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} - \log H(\lambda)\right) \le \frac{C}{4},$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Integrando tra 0 e λ, se $\lambda > 0$, o tra λ e 0 se $\lambda < 0$, si ottiene, indipendentemente dal segno di λ,

$$\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log H(\varepsilon) \le \frac{C}{4}\lambda.$$

Tenendo presente che $H(0) = 1$, se ne deduce che

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log H(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log H(\varepsilon) - \log H(0)}{\varepsilon}\\ &= \frac{H'(0)}{H(0)} = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu,\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\lambda}\log H(\lambda) \le \frac{C}{4}\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

da cui

$$H(\lambda) \le \exp\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \frac{C}{4}\lambda^2\right), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Notiamo inoltre che vale la seguente identità:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x - \lambda^2/2}d\lambda = e^{x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda-x)^2/2}d\lambda = \sqrt{2\pi}e^{x^2/2},$$

grazie alla quale deduciamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} H(\lambda)e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda &\le \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \frac{C}{4}\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4\alpha}\right)d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\lambda\sqrt{\frac{2\alpha}{1-C\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \frac{\lambda^2}{2}\right)d\lambda\\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{1-C\alpha}}\exp\left(\frac{\alpha}{1-C\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right)^2\right)\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

A questo punto la conclusione segue dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} H(\lambda)e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda f}e^{-\lambda^2/4\alpha}d\lambda d\mu = \sqrt{2\alpha}\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\alpha f^2}d\mu.$$

□

3.4. Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

Scopo di questa sezione è mostrare che il semigruppo di Ornstein–Uhlenbeck è ipercontrattivo. Per questo ci occorrono dei risultati preliminari che richiamiamo di seguito.
Consideriamo l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck definito da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} q_{ij}D_{ij}u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_iD_ju(x)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(QD^2u(x)\right) + < Bx, \nabla u(x) >, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

dove $Q = (q_{ij})$ è una matrice reale, simmetrica, definita positiva e $B = (b_{ij})$ è una matrice reale i cui autovalori appartengono al semipiano sinistro aperto cioè $\sigma(B) \subseteq \mathbb{C}_-$.
Il semigruppo generato $(P(t))_{t\geq 0}$ ha la seguente espressione esplicita, dovuta a Kolmogorov

$$P(t)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det Q_t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} f(e^{tB}x - y)e^{-\frac{1}{2}<Q_t^{-1}y,y>}dy \tag{3.1}$$

con $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ e

$$Q_t = \int_0^t e^{sB}Qe^{sB^*}ds, \qquad t \in (0, \infty].$$

Con B^* abbiamo denotato la matrice trasposta di B. Osserviamo che le ipotesi fatte su Q e B assicurano che la matrice Q_t sia ben definita, simmetrica e definita positiva per ogni $t \in (0, \infty]$.
Definiamo la misura Gaussiana

$$\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det Q_\infty)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\langle Q_\infty^{-1}x,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Si dimostra che μ è l'unica misura invariante per il semigruppo $(P(t))$ ([**10**, Teoremi 11.7, 11.11]).
Tenendo conto della definizione di Q_t, $0 \leq t \leq \infty$, si può vedere che

$$Q_t + e^{tB}Q_\infty e^{tB^*} = Q_\infty \tag{3.2}$$

per ogni $t \geq 0$; da qui segue

$$\frac{d}{dt}\left(Q_t + e^{tB}Q_\infty e^{tB^*}\right)|_{t=0} = Q + BQ_\infty + Q_\infty B^* = 0. \tag{3.3}$$

Sia ora M una matrice reale invertibile. Definiamo la trasformata

$$\Phi_M : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N); \qquad (\Phi_M u)(y) = u(M^{-1}y),\ y \in \mathbb{R}^N.$$

Osserviamo che $\Phi_M\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che

$$\mathcal{L} = \Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$$

su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, dove

$$\widetilde{\mathcal{L}}v(y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widetilde{Q}D^2v(y)\right) + \langle \widetilde{B}y, \nabla v(y)\rangle, \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

con

$$\widetilde{Q} = MQM^* \quad \text{e} \quad \widetilde{B} = MBM^{-1}.$$

Da qui segue che

$$\widetilde{Q}_\infty = MQ_\infty M^*$$

e quindi

$$\widetilde{\mu}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det \widetilde{Q}_\infty)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \widetilde{Q}_\infty^{-1}y,y\rangle} = \frac{1}{|\det M|}\mu(M^*y), \tag{3.4}$$

è l'unica misura invariante per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ generato da $\widetilde{\mathcal{L}}$ e verificante, a sua volta, la formula

$$P(t) = \Phi_M^{-1}\widetilde{P}(t)\Phi_M.$$

Inoltre, per ogni $1 \le r < \infty$,

$$\Phi_M : L^r(\mu) \to L^r(\widetilde{\mu})$$

è un'isometria. Dal fatto che

$$\langle \Phi_M f, g\rangle_{L^2(\widetilde{\mu})} = \langle f, \Phi_M^{-1} g\rangle_{L^2(\mu)}$$

segue poi che $P(t)$ è simmetrico in $L^2(\mu)$ se e solo se $\widetilde{P}(t)$ è simmetrico in $L^2(\widetilde{\mu})$.
Ora, specifichiamo la scelta di M. Siccome Q è reale, simmetrica e definita positiva, esiste una matrice reale invertibile M_1 tale che $M_1QM_1^* = I$. Per la stessa ragione, si può trovare una matrice reale ortogonale M_2 tale che

$$M_2(M_1Q_\infty M_1^*)M_2^* = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_N}\right) =: D_{\frac{1}{\alpha}}$$

con opportuni $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots N$. Prendiamo

$$M = M_2M_1$$

e usiamo la trasformata Φ_M corrispondente; otteniamo così che $\mathcal{L} = \Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$, dove

$$\widetilde{\mathcal{L}}u(x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \langle \widetilde{B}x, \nabla u(x)\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.5}$$

avendo posto $\widetilde{B} = MBM^{-1}$. Osserviamo che, in accordo con (3.4),

$$\widetilde{\mu}(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N} \sqrt{\alpha_k} e^{-\frac{1}{2}\langle D_\alpha y, y\rangle}, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

è l'unica misura invariante per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$. Vale dunque il seguente lemma.

LEMMA 3.22.

(a) *Esiste M, matrice reale invertibile, tale che* $\mathcal{L}=\Phi_M^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\Phi_M$*, dove* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *è dato da* (3.5)*. Inoltre,*

$$\widetilde{Q}_\infty = D_{\frac{1}{\alpha}},$$

con opportuni $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots N$.

(b) *Posto*

$$\widetilde{\mathcal{L}}^0 u = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\langle D_\alpha x, \nabla u\rangle, \quad Cu = \langle B_1 x, \nabla u\rangle,$$

con $B_1 = \widetilde{B} + \frac{1}{2}D_\alpha$*, risulta*

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}^0 + C$$

e

$$B_1 D_{\frac{1}{\alpha}} = -D_{\frac{1}{\alpha}} B_1^*.$$

Inoltre,

$$\widetilde{\mu}(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N \sqrt{\alpha_k} e^{-\frac{1}{2}\langle D_\alpha y, y\rangle}$$

è l'unica misura invariante per il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck $(\widetilde{P}_{\rm sim}(t))$ *generato da* $\widetilde{\mathcal{L}}^0$ *e* $\widetilde{\mathcal{L}}^0$ *è simmetrico.*

Dividiamo la dimostrazione dell'ipercontrattività di $(P(t))$ in due casi, distinguendo a seconda che $(P(t))$ sia simmetrico in $L^2(\mu)$ o no. In virtú del Lemma 3.22 e del fatto che Φ_M è un'isometria da $L^r(\mu)$ su $L^r(\widetilde{\mu})$, studiare l'ipercontrattività di $(P(t))$ in $L^p(\mu)$ è equivalente a studiare quella del semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ generato da $\widetilde{\mathcal{L}}$ in $L^p(\widetilde{\mu})$.

3.4.1. $(P(t))$ **simmetrico in** $L^2(\mu)$**.** Premettiamo un lemma che caratterizza la simmetria del semigruppo $(P(t))$. Dalla definizione di $\widetilde{B}$ otteniamo che

$$QB^* = BQ \Longleftrightarrow \widetilde{B}^* = \widetilde{B}. \tag{3.6}$$

LEMMA 3.23. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(a) $(P(t))$ *è simmetrico in* $L^2(\mu)$.
(b) $Q_\infty B^* = BQ_\infty$.
(c) $Q_t B^* = BQ_t$ *per ogni* $t \geq 0$.
(d) $QB^* = BQ$.

Dim. $(a) \Rightarrow (b)$: Poniamo $f_\lambda(x) = \langle x, \lambda\rangle$, $x, \lambda \in \mathbb{R}^N$. Allora

$$P(t)f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle e^{tB}x - y, \lambda\rangle d\mu_t(y) = \langle e^{tB}x, \lambda\rangle,$$

dove

$$d\mu_t(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det Q_t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle Q_t^{-1}y, y\rangle}\, dy.$$

Siccome $\int_{\mathbb{R}^N} \langle x, \lambda_1\rangle\langle x, \lambda_2\rangle d\mu(x) = \langle Q_\infty \lambda_1, \lambda_2\rangle$, otteniamo

$$\langle P(t)f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}\rangle_{L^2(\mu)} = \langle e^{tB}Q_\infty \lambda_2, \lambda_1\rangle$$

per ogni λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^N$. Da qui segue che

$$\begin{aligned} \langle P(t)f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}\rangle_{L^2(\mu)} &= \langle f_{\lambda_1}, P(t)f_{\lambda_2}\rangle_{L^2(\mu)} \\ &\iff Q_\infty e^{tB^*} = e^{tB}Q_\infty, \end{aligned}$$

quindi $Q_\infty B^* = BQ_\infty$
$(b) \Rightarrow (c)$: Segue da (3.2).
$(c) \Rightarrow (d)$: Si ottiene prendendo la derivata di Q_tB^* e BQ_t nel punto $t = 0$.
$(d) \Rightarrow (a)$: Da (3.6) segue che $\widetilde{B}^* = \widetilde{B}$. Siccome $\widetilde{Q}_\infty = \int_0^\infty e^{s\widetilde{B}}\widetilde{Q}e^{s\widetilde{B}^*}\, ds$, si deduce che $\widetilde{Q}_\infty \widetilde{B} = \widetilde{B}\widetilde{Q}_\infty$ e quindi applicando (3.3) si ottiene che

$$\widetilde{B} = -\frac{1}{2}\widetilde{Q}_\infty^{-1} = -\frac{1}{2}D_\alpha. \tag{3.7}$$

Ora si vede che

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}}u, v\rangle_{L^2(\widetilde{\mu})} = -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\, d\widetilde{\mu} = \langle u, \widetilde{\mathcal{L}}v\rangle_{L^2(\widetilde{\mu})}$$

per ogni u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Usando il fatto che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un core per $(\widetilde{\mathcal{L}}_2, D(\widetilde{\mathcal{L}}_2))$ in $L^2(\widetilde{\mu})$ si deduce che $R(\lambda, \widetilde{\mathcal{L}}_2)^* = R(\lambda, \widetilde{\mathcal{L}}_2)$ per ogni $\lambda > 0$. Quindi $\widetilde{P}(\cdot)$ è simmetrico in $L^2(\widetilde{\mu})$. □

Nel caso simmetrico in esame, risulta di fatto che $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}^0$ e $\widetilde{P}(t) = \widetilde{P}_{\mathrm{sim}}(t)$, secondo la notazione introdotta nel Lemma 3.22. Da (3.1) si ricava che

$$\widetilde{P}(t)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det \widetilde{Q}_t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - y)e^{-\frac{1}{2}<\widetilde{Q}_t^{-1}y, y>}dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Siccome $\widetilde{Q}_t = \int_0^t e^{-sD_\alpha}\, ds = D_{\frac{1}{\alpha}}(I - e^{-tD_\alpha}) = \widetilde{Q}_\infty(I - e^{-tD_\alpha})$, usando il cambiamento di variabili $z = (I - e^{-tD_\alpha})^{-\frac{1}{2}}y$ si deduce che

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(t)f(x) &= \frac{\det (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det \widetilde{Q}_\infty(I - e^{-tD_\alpha}))^{\frac{1}{2}}} \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}z)e^{-\frac{1}{2}<\widetilde{Q}_\infty^{-1}z, z>}dz \end{aligned}$$

ed infine

$$(\widetilde{P}(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}y)d\widetilde{\mu}(y), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.8}$$

Segue ora il teorema di Nelson [**30**] per l'ipercontrattività di $(P(t))$.

TEOREMA 3.24. *Poniamo* $\alpha_0 = \min_{1\le i\le N} \alpha_i$.

(i) *Se* $p, q \in (1, +\infty)$ *sono t.c.* $(q-1) \le e^{t\alpha_0}(p-1)$ *allora* $P(t)$ *è ipercontrattivo come operatore da* $L^p(\mu)$ *in* $L^q(\mu)$, *cioè*

$$\|P(t)f\|_{L^q(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)};$$

(ii) *se* $q-1 > e^{t\alpha_0}(p-1)$, *allora* $P(t)$ *non è limitato come operatore da* $L^p(\mu)$ *in* $L^q(\mu)$.

DIM. Come abbiamo osservato prima, usando l'isometria Φ_M, è sufficiente verificare (i) e (ii) per il semigruppo $(\widetilde{P}(t))$ negli spazi di Lebesgue relativi a $\tilde{\mu}$.

(i) Vediamo per quale costante positiva λ l'ipotesi della Proposizione 3.15, riscritta in termini di Γ, grazie all'Osservazione 3.16, nella forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f}\Gamma(\widetilde{P}(t)f, \widetilde{P}(t)f)d\widetilde{\mu} \le e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{f}\Gamma(f,f)d\widetilde{\mu} \tag{3.9}$$

è soddisfatta per il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.
Scegliamo $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e ricordiamo che Γ è così definita $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$ per ogni $f \in \mathcal{A}$.
Se $f \in \mathcal{A}$ allora, a meno di diagonalizzare B, si ha

$$D_j(\widetilde{P}(t)f)(x) = e^{-t\frac{\alpha_j}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} D_j f(e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x - (I - e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}y)d\widetilde{\mu}(y)$$

quindi

$$D_j(\widetilde{P}(t)f)(x) = e^{-t\frac{\alpha_j}{2}}\widetilde{P}(t)D_j f(x).$$

Osserviamo ora che se si considera un'altra funzione $g \in \mathcal{A}$ e se $f \in \mathcal{A}_+$, grazie alla disuguaglianza di Hölder si ricava che

$$(\widetilde{P}(t)g)^2 = \left(\widetilde{P}(t)\Big(\sqrt{f}\,\frac{g}{\sqrt{f}}\Big)\right)^2 \le \big[\widetilde{P}(t)f\big]\left[\widetilde{P}(t)\Big(\frac{g^2}{f}\Big)\right];$$

e quindi

$$\frac{(\widetilde{P}(t)g)^2}{\widetilde{P}(t)f} \le \widetilde{P}(t)\left(\frac{g^2}{f}\right);$$

se $g = D_j f$, dalla disuguaglianza di sopra e dal fatto che $\widetilde{\mu}$ è una misura invariante per $\widetilde{P}(\cdot)$ si ricava che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f} |D_j \widetilde{P}(t) f|^2 d\widetilde{\mu} &\leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\widetilde{P}(t)|D_j f|)^2}{\widetilde{P}(t) f} d\widetilde{\mu} \\ &\leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{P}(t) \frac{|D_j f|^2}{f} d\widetilde{\mu} \\ &= e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D_j f|^2}{f} d\widetilde{\mu},\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\widetilde{P}(t)f} |\nabla \widetilde{P}(t) f|^2 d\widetilde{\mu} \leq e^{-t\alpha_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla f|^2}{f} d\widetilde{\mu}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}_+$. Quindi la disuguaglianza (3.9) è verificata con $\lambda = \alpha_0$. Infine, l'ergodicità di $\widetilde{P}(t)$, ossia la proprietà per cui

$$\widetilde{P}(t) f \to \int_{\mathbb{R}^N} f d\widetilde{\mu} \quad \text{in } L^2(\widetilde{\mu}),$$

per $t \to +\infty$, si può verificare usando (3.8) e il teorema di convergenza dominata (si veda [**10**] per il caso generale). Grazie alla Proposizione 3.15, si ricava dunque che $\widetilde{P}(t)$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $C = \frac{4}{\alpha_0}$; inoltre, utilizzando il Teorema 3.20, si ottiene che vale l'ipercontrattività

$$\|\widetilde{P}(t)\|_{p \to q(t)} \leq 1.$$

con

$$\frac{q(t) - 1}{p - 1} = e^{4t/C} = e^{t\alpha_0}.$$

Questo dimostra il punto (i) per $q(t)$; la tesi per $q < q(t)$ segue dal fatto che μ è una misura di probabilità.

(ii) Supponiamo ora che $q - 1 > e^{t\alpha_0}(p - 1)$.
Siccome $\alpha_0 = \min_{1 \leq j \leq N} \alpha_j$, esiste allora $k \in \{1, \ldots N\}$ tale che $\alpha_0 = \alpha_k$. Fissiamo $\beta \in \mathbb{R}$ e consideriamo $\lambda = \beta \sqrt{\alpha_k} e_k$ dove $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Sia $f_\lambda(x) = e^{<\lambda, x>}$, $x \in \mathbb{R}^N$, da

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{<\lambda, x>} d\widetilde{\mu} = e^{\frac{\beta^2}{2}}$$

si deduce che

$$||f_\lambda||_{L^p(\widetilde{\mu})} = e^{\frac{p}{2}\beta^2}.$$

Usando (3.8) si ricava che

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}(t)f_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{<\lambda, e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}x-(I-e^{-tD_\alpha})^{\frac{1}{2}}y>} d\widetilde{\mu}(y) \\ &= f_{e^{-\frac{t}{2}D_\alpha}\lambda}(x)\, e^{\frac{1}{2}(1-e^{-t\alpha_0})\beta^2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\|\widetilde{P}(t)f_\lambda\|_{L^q(\widetilde{\mu})}}{\|f_\lambda\|_{L^p(\widetilde{\mu})}} = \exp\left\{\frac{\beta^2}{2}\left[e^{-t\alpha_0}(q-1)-(p-1)\right]\right\} \to \infty$$

per $|\beta| \to \infty$ se $(q-1) > e^{t\alpha_0}(p-1)$. □

3.4.2. $(P(t))$ non simmetrico in $L^2(\mu)$. Definiamo il gruppo

$$S(t)f(x) = f(e^{tB_1}x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N,$$

per $f \in L^p(\widetilde{\mu})$ e $1 < p < \infty$. La notazione è quella del Lemma 3.22. Allora si può provare che

$$\|S(t)f\|_{L^p(\widetilde{\mu})} = \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})} \quad \text{per ogni } f \in L^p(\widetilde{\mu}), \tag{3.10}$$

(si veda [**27**]). Usando [**27**, Teorema 3.4] si deduce che

$$\widetilde{P}(t)f = \lim_{n\to\infty}\left(\widetilde{P}_{\text{sim}}\left(\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f, \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$, dove $\widetilde{P}_{\text{sim}}(t)$ è il semigruppo simmetrico definito nel Lemma 3.22.
Da qui discende il seguente corollario.

Corollario 3.25. *Se p, $q \in (1, +\infty)$ sono tali che $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$, allora*

$$\|P(t)f\|_{L^q(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$$

per ogni $f \in L^p(\mu)$, dove $\alpha_0 = \min_{1\leq i\leq N}\alpha_i$.

Inoltre, $(P(t))$ soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica tight con costante $\frac{4}{\alpha_0}$ e quindi l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck $\mathcal{L}$ soddisfa la condizione di spectral gap con costante $\frac{2}{\alpha_0}$.

Dim. Ancora una volta, come abbiamo osservato nella dimostrazione del Teorema 3.24, usando Φ_M si ha che l'ipercontrattività di $P(t)$ è equivalente a quella di $\widetilde{P}(t)$.
Utilizzando il Teorema 3.24 e (3.10), si ottiene che

$$\left\|\widetilde{P}_{\text{sim}}\Big(\frac{t}{n}\Big)S\Big(\frac{t}{n}\Big)f\right\|_{L^q(\widetilde{\mu})} \leq \left\|S\Big(\frac{t}{n}\Big)f\right\|_{L^p(\widetilde{\mu})} = \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$, $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$ tale che $e^{t\alpha_0}(p-1) \geq (q-1)$. Quindi, usando (3.11) e la contrattività di $\widetilde{P}_{\rm sim}(t)$ in $L^p(\widetilde{\mu})$ si deduce che

$$\|\widetilde{P}(t)f\|_{L^q(\widetilde{\mu})} \leq \|f\|_{L^p(\widetilde{\mu})}$$

per ogni $f \in L^p(\widetilde{\mu})$.
L'ultima affermazione segue dal teorema di Gross e dal Teorema 3.18. □

Osservazione 3.26. Nel caso simmetrico la condizione $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$ per avere l'ipercontrattività è ottimale, come è stato provato nel Teorema 3.24. Per il caso generale, in [**16**, Teorema 2.2] è stato dimostrato con metodi stocastici che la condizione

$$(q-1) \leq (p-1)\|Q_\infty^{-\frac{1}{2}} e^{tB} Q_\infty^{\frac{1}{2}}\|^{-2} \tag{3.12}$$

implica l'ipercontrattività di $(P(t))$. Quindi, certamente, la condizione $(q-1) \leq e^{t\alpha_0}(p-1)$ non è ottimale nel caso non simmetrico. Tuttavia non è noto se la condizione (3.12) lo sia.